

Obiectivele de cercetare

Obiectivele de cercetare in cadrul acestui proiect sunt abordarea problemelor de mai jos care speram sa se concretizeze in articole stiintice elaborate in cei trei ani de proiect:

1) Descrierea si clasificarea tipurilor de produse bicrossed a doua grupuri finite date. Aceasta e o problema deschisa de peste 70 de ani. Primele contributii in aceasta directie a trei din membrii grantului au fost facute anul acesta intr-o lucrare trimisa spre publicare. *Impactul si relevanta problemei:* pe langa interesul in sine al problemei la nivel de grupuri rezolvarea problemei are implicatii imediate la clasificarea algebrelor Hopf finit dimensionale care factorizeaza printr-o algebra grupala si duala unei algebre grupale a doua grupuri care sunt pereche potrivita (matched pair).

2) Descrierea grupurilor finite simple neabeliene care nu sunt produse bicrossed a doua subgrupuri proprii ale sale. *Impactul si relevanta problemei:* reusita unei astfel de rezultat ar da o teorema de structura privind problema daca un grup simplu finit neabelian este *idecompozabil*.

3) Dorim sa introducem un nou produs general in algebra care sa unifice cele doua produse deja clasice in matematica: produsele crossed si produsele bicrossed (knot, factorization). Aceste doua tipuri de produse, complet diferite, sunt prezente in urmatoarele domenii ale matematicii: grupuri, algebre, algebre Lie, grupuri Lie, algebre Hopf, C^* -algebre, etc. *Impactul si relevanta problemei* rimii pasi facuti la nivel de grupuri sunt extrem de promitatori. *Impact si aplicabilitate a problemei:* dorim introducerea acestui nou tip de produs foarte general care speram sa deschida o noua cale de abordare a clasificarii algebrelor Hopf finit dimensionale, o noua teorie generala de coomologie. In aceasta directie suspectam ca vom obtine o teorie foarte bogata care poate duce la numeroase articole pe care speram sa le scriem.

4) Dorim sa construim noi clase de solutii pentru ecuatiile de fuziune (pentagon) si apoi sa facem un studiu separat al ecuatiilor de fuziune pe multimi. *Impactul si aplicabilitatea:* vom construi noi tipuri de grupuri cuantice finite care se obtin din solutiile ale ecuatiilor de fuziune. Totodata speram in obtinerea unei teoreme de tip FRT pentru ecuatiile de fuziune pe multimi.

5) Generalizarea conceptului de integrala de la algebre Hopf in contextul general al coalgebrelor prin considerarea categoriei coreprezentarilor finit dimensionale si ai rezultatelor de la algebre Hopf co-Frobenius la coalgebre co-Frobenius. *Impact si aplicabilitate:* o posibila aplicatie a acestei linii de cercetare este o teorie a dualitatii in contextul categoriei coalgebrelor co-Frobenius care sa generalizeze dualitatile Pontryagin-Tanaka-Krein.

6) Finalizarea si obtinerea rezultatului complet de caracterizare a coalgebrelor C cu proprietatea ca o parte rationala a oricarui modul peste C^* – algebra duala lui C – este un sumant direct al acestui modul, o problema de tip splitting (splitting-ul in raport cu

modulele rationale). *Impact si aplicabilitate*: teoria coalgebrelor si a algebrelor lor duale.

7) In directia teoriei categoriilor, a coring-urilor si a comodulelor asociate, urmarim sa obtinem descrierea unor categorii generale cum ar fi anumite categorii de diagrame, drept categorii de comodule peste anumite coring-uri; in particular, aceasta ar generaliza cateva rezultate existente amintite mai sus pentru categoria complexelor de (co)lanturi sau categorii produs. *Impact si aplicabilitate*: reusita acestui demers are aplicatii imediate in intelegerea mai buna a structurii categoriilor mama.

8) Posibile aplicatii in topologie si/sau algebra omologica: diversele structuri existente in (co)omologia unui spatiu topologic si legaturile care exista cu algebrele Hopf prin existenta unei multiplicari si a unei comultiplicari poarta amprenta insesi definitiei cu care se construiesc aceste obiecte, anume simplici si lanturi simpliciale. *Impact si aplicabilitate*: interpretarea acestora ca o anumita (co)multiplicare asociata unor obiecte mai generale decat complexele de lanturi simpliciale, construite dupa un anumit "model" mai general decat un simplex, poate duce la introducerea unei noi teorii generalizate de (co)omologie.

9) Constructii de algebre Hopf cu multe proprietati speciale: algebre Hopf finit dimensionale, separabile, Frobenius, si quasi-triangelare. Acest tip de algebre se pot construi folosind teoreme de reconstructie tip FRT ce au mai fost folosite in literatura. De exemplu, se pot construi algebre Hopf finit dimensionale (Militaru), algebre separabile (Caenepeel, Ion, Militaru), algebre Hopf quasi-triangelare (Drinfeld) dar nu a fost explorata posibilitatea de a construi algebre Hopf cu toate aceste proprietati simultan. *Impact si relevanta*: Pana in acest moment in teoria algebrelor Hopf lipseste o clasa de obiecte pentru care structura este in acelasi timp relevanta pentru aplicatii suficient de rigida astfel incat obiectele cu o asemenea structura sa poata fi clasificate (e.g. analogul grupurilor simple in teoria grupurilor). Constructia sugerata pare a indeplini aceste conditii.

10) Algebre Hopf cu structura triangulata si baze Poincare-Birkhoff-Witt: algebrele anvelopante cuantice sunt exemple de acest tip de algebre Hopf si foarte mare parte a rezultatelor si proprietatilor in teoria grupurilor cuantice poate fi extinsa si speram sa o putem face la astfel de algebre. Mai mult, algebrele cu aceste proprietati sunt deformari algebrice (aceasta proprietate fiind mai puternica decat cea folosita generic in literatura de a fi deformare formală) de inele polinomiale cu structura triangulata. *Impact si relevanta*: Algebrele anvelopante cuantice sunt printre cele mai bogate structural in teoria algebrelor Hopf, beneficiind de numeroase conexiuni si aplicatii in alte domenii, inclusiv cu teoria clasica a reprezentarii. Obiectele pe care ne propunem sa le studiem sunt, prin proprietatile lor, foarte apropiate de algebrele anvelopante cuantice, dar cu noi deschideri in ceea ce priveste relevanta, in special in geometria algebrica.

11) Constructii topologice de algebre Hecke: vom produce constructii topologice pentru algebrele Hecke dublu afine generalizate introduse de Gan, Etingof, si Oblomkov in 2007. Vor fi investigate noi constructii topologice care sa puna in evidenta

automorfismele acestor algebre cat si al algebreleor dublu affine. *Impact si relevanta:* Algebrele Hecke dublu affine sunt obiecte fundamentale in matematica moderna. Descrierea lor in termeni topologici deschide drumul pentru constructii geometrice ale reprezentarilor lor, aceste fiind in acest caz realizate ca spatii de solutii pentru o conexiune speciala pe care algebra in chestiune actioneaza prin monodromie.

12) Teoria reprezentarii: acesta este un proiect mai amplu, aflat deja in derulare si in care s-au obtinut deja rezultate remarcabile (de domnul Bogdan Ion dintre membri grantului). Vom continua sa investigam polinoamele Macdonald din punctul de vedere al teoriei reprezentarii. Asa cum este deja cunoscut aceasta implica cateva tipuri diferite de teorie a reprezentarii: pentru grupuri reale, p-adice, Kac-Moody. Astfel, vom studia interactiunea dintre aceste tipuri de grupuri (la nivelul teoriei reprezentarii) si vom exploata implicatiile, in special in ceea ce priveste noi formule geometrice pentru multiplicitati. *Impact si relevanta:* Proprietatile ce urmeaza a fi studiate ilustreaza ceea ce Harish-Chandra a numit principiul Leschetz in teoria reprezentarii. Acest principiu sustine ca anumite rezultate in teoria reprezentarii sunt adevarate independent de corpul peste care grupurile in chestiune sunt definite. La 35 de ani dupa formularea lui, domeniul de valabilitate ramane ilusiv. Domeniul de studiu propus contribuie la elucidarea domeniului de valabilitate in cazul reprezentarilor sferice finit dimensionale. Mai mult, formulele geometrice pentru multiplicitati, sunt mult mai generale decat cele obtinute de Mirkovic si Vilonen (Annals of Math., 2006) si, cel putin in prezent, nu pot fi obtinute prin metodele lor.

13) Dorim ca in timpul acestui proiect incepem si sa finalizam scrierea unui monografii pe care sa o publicam intr-o editura internationala de introducere in algebra necomutativa care sa fie adresata studentilor de master si doctoranzi: i.e. sa fie o monografie cu care sa poate inceapa un tinar preocupat de algebra studiul.