

Concursul de admitere iulie 2017
Domeniul de licență – *Informatică*

I. Algebră. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

- (a) Să se calculeze A^2 și A^3 .
- (b) Să se determine toate matricele $X \in M_2(\mathbb{R})$ pentru care $AX = 2X$.
- (c) Să se determine valorile reale ale lui m pentru care există o matrice nenulă $B \in M_2(\mathbb{R})$ cu $AB = mB$.
- (d) Fie $n, p \in \mathbb{N}^*$, $n \neq p$. Să se arate că nu există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^n = \lambda A^p$.

II. Analiză. Fie funcția $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctg \frac{1}{x} - \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$.

- (a) Studiați monotonia și convexitatea funcției f .
- (b) Decideți și justificați dacă funcția $g : \mathbb{R}^* \rightarrow \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $g(x) = f(x)$ este sau nu este bijectivă.
- (c) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, ecuația $f(x) = \frac{1}{n}$ are o soluție reală unică, notată cu x_n . Demonstrați că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este convergent și determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.
- (d) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ și $x = \sqrt{3}$.

III. Geometrie. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctul $M(3, 3)$ și triunghiul ABC determinat de dreptele $AB : x + 2y - 4 = 0$, $BC : 3x + y - 2 = 0$ și $CA : x - 3y - 4 = 0$.

- (a) Să se calculeze aria triunghiului ABC .
- (b) Fie P, Q și R proiecțiile punctului M pe dreptele OA, OB și respectiv AB . Să se demonstreze că punctele P, Q și R sunt coliniare.
- (c) Notăm cu m numărul punctelor din interiorul patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi și cu n numărul punctelor de pe reuniunea laturilor patrulaterului $BCAM$ care au ambele coordonate numere întregi. Să se verifice că aria patrulaterului $BCAM$ este $m + \frac{1}{2}n - 1$.

Subiectul de Informatică se găsește pe verso.

IV. Informatică.

Fie n un număr natural nenul. Fie v un vector cu n poziții numerotate de la 1 la n și elemente numere naturale diferite, de la 1 la n , într-o ordine oarecare. Pentru i și j numere naturale între 1 și n , numim $FLIP(n, v, i, j)$ operația care inversează ordinea elementelor din v situate pe pozițiile de la i la j .

- Să se scrie în limbaj de programare o procedură (sau funcție) care implementează operația $FLIP(n, v, i, j)$.
- Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v , folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația $FLIP(n, v, 1, k)$, cu k de la 2 la n .
- Considerăm că n este o putere a lui 2 ($n = 2^m$, cu m număr natural nenul) și vectorul v are proprietatea că pentru orice i de la 1 la m și orice j de la 1 la 2^{m-i} , există k de la 1 la 2^{m-i} , astfel încât pe pozițiile din v de la $2^{i(j-1)+1}$ la 2^j se află numerele naturale de la $2^{i(k-1)+1}$ la 2^k , într-o ordine oarecare. Să se scrie un program care sortează crescător vectorul v , folosind pentru schimbarea ordinii elementelor în v doar operația $FLIP(n, v, 2^{i(j-1)+1}, 2^j)$, cu i de la 1 la m și j de la 1 la 2^{m-i} , printr-un algoritm mai eficient decât cel implementat la punctul b), care se bazează pe proprietatea vectorului v .

Exemple:

	Date de intrare	Date de ieșire
a)	$FLIP(9, [3\ 2\ 6\ 8\ 5\ 9\ 1\ 7\ 4], 1, 6)$	$v = [9\ 5\ 8\ 6\ 2\ 3\ 1\ 7\ 4]$
	$FLIP(4, [2\ 1\ 4\ 3], 1, 4)$	$v = [3\ 4\ 1\ 2]$
	$FLIP(16, [14\ 13\ 15\ 16\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5], 5, 8)$	$v = [14\ 13\ 15\ 16\ 10\ 9\ 12\ 11\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5]$
b)	$n = 9$ $v = [3\ 2\ 6\ 8\ 5\ 9\ 1\ 7\ 4]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9]$
	$n = 4$ $v = [2\ 1\ 4\ 3]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4]$
c)	$n = 16$ $v = [14\ 13\ 15\ 16\ 11\ 12\ 9\ 10\ 2\ 1\ 4\ 3\ 8\ 7\ 6\ 5]$	$v = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15\ 16]$

Note:

- Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). La fiecare subpunct a), b), c), se va preciza complexitatea timp, în funcție de n , a soluției implementate și se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.
- Toate operațiile de tip FLIP se vor face în vectorul v , fără a se folosi alți vectori auxiliari.
- La subpunctul a), datele se transmit ca parametri ai procedurii/funcției $FLIP(n, v, i, j)$. La subpunctele b) și c), se citesc de la tastatură n și v , fiecare pe un rând separat și se afișează vectorul v sortat crescător, pe un singur rând. Se va considera că datele de intrare ale programelor sunt oricât de mari, dar fără a pune probleme de reprezentare în memorie cu ajutorul tipurilor de date standard.
- Programele vor folosi doar instrucțiunile de bază ale limbajului de programare ales, inclusiv cele de intrare/ieșire, dar nu și alte funcții din biblioteci specializate.