

Concursul de admitere iulie 2012
Domeniul de licență - Matematică

I. Algebră

1. Să se arate că:

(i) Mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbf{R}, x^2 + y^2 = 1 \right\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea matricelor

și că (G, \cdot) este grup abelian.

(ii) Mulțimea $U = \{z \mid z \in \mathbf{C}, |z| = 1\}$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea numerelor complexe și (U, \cdot) este grup.

(iii) Grupurile U și G sunt izomorfe.

2. Fie polinomul cu coeficienți reali $P(X) = X^4 + aX^2 + bX - 1$. Să se determine a și b pentru care $P(X)$ se divide cu $X^2 + X + 1$ și în acest caz să se determine toate rădăcinile complexe ale lui $P(X)$.

II. Analiză

Fie funcția $f : \mathbf{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$.

(i) Determinați ecuațiile asimptotelor graficului funcției f .

(ii) Studiați monotonia și determinați punctele de extrem local ale funcției f .

(iii) Să se arate că $\int_0^1 f(x) dx = \ln 2 - \frac{1}{2}$.

(iv) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ definit prin $x_0 > 0$ și $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$, este convergent la 0.

III. Geometrie

(i) Se consideră paralelogramul $ABCD$ și punctele E și F astfel încât $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$ și $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$. Să se demonstreze că punctele A , F și C sunt coliniare.

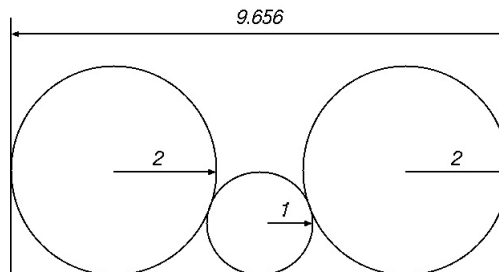
(ii) Să se determine ecuația simetricii dreptei $d : 2x - 3y + 1 = 0$ față de punctul $A(-3, 4)$.

(iii) Știind că $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

IV. Informatică

Se dau n cercuri de raze r_1, r_2, \dots, r_n . Aceste cercuri sunt "împachetate" într-un dreptunghi astfel: toate cercurile sunt tangente la baza dreptunghiului, cercurile sunt aranjate în ordinea inițială (cel mai din stânga fiind cercul de rază r_1 , cel mai din dreapta cercul de rază r_n), iar cercurile consecutive (de raze r_i și respectiv r_{i+1}) sunt tangente. Să se scrie un program care calculează lățimea minimă a dreptunghiului în care încap cercurile. Rezultatul se va afișa cu trei zecimale exacte.

Spre exemplu, dacă $n = 3$, $r_1 = 2$, $r_2 = 1$ și $r_3 = 2$, atunci rezultatul care trebuie afișat este 9.656.



Notă: Programul va fi scris într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal, C, C++). Se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit și ale implementării sub formă de program: semnificația variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucțiunilor condiționale.

Timp de lucru 3 ore.