Universitatea din Bucuresti, Facultatea de Matematică şi Informatică
Concursul de admitere, iulie 2011. Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră 1. (a) Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se demonstreze că suma cuburilor primelor n numere naturale nenule este $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
(b) Să se determine numerele naturale $x_1 < x_2 < \ldots < x_{10}$ pentru care $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{10}^3 = 2025$.

2. Fie matricea $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbf{R}$.
(i) Să se calculeze X^2.
(ii) Să se arate că X este inversabilă în $M_2(\mathbf{R})$ dacă şi numai dacă $a + b \neq 0$.
(iii) Să se determine a şi b pentru care $X^3 = O_2$.

II. Analiză matematică 1. Fie funcţia $f : (-\infty, -1) \bigcup (0, \infty) \to \mathbf{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.
a) Să se calculeze $f'(x)$ şi să se studieze monotonia funcţiei f.
b) Să se determine ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.
c) Fie şirul $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ cu $a_n = \dfrac{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{n}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^\pi x^n \sin^2 x\, dx$ şi $J_n = \displaystyle\int_0^\pi x^n \cos^2 x\, dx$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.
a) Să se calculeze I_0 şi J_0.
b) Să se arate că $I_n + J_n = \dfrac{\pi^{n+1}}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

III. Geometrie 1. Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(4, n)$, $C(2, 2)$ şi $D(m, 5)$. Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

2. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel în cât $\sin a + \sin b = 1$ şi $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a - b)$.

3. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.

IV. Informatică

Se dă un vector v de n elemente egale cu 1. Prin partiţie a vectorului v înţelegem o împărţire a vectorului în subvectori, astfel încât fiecare element al vectorului v apare exact o dată într-unul dintre subvectori. Pentru fiecare partiţie a vectorului v în k subvectori $v_{11}, \ldots, v_{1n_1}, v_{21} \ldots, v_{2n_2}, \ldots, v_{k1}, \ldots, v_{kn_k}$, se calculează produsul sumelor elementelor din fiecare subvector al partiţiei, adică $\prod_{i=1}^{k} n_i$.

a) Să se scrie un program care determină cel mai mare produs calculat în acest fel pentru toate partiţiile posibile ale vectorului v.

b) Există o soluţie la punctul a) care să nu calculeze toate produsele posibile? Justificaţi.

Notă. Programele vor fi scrise într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal,C,C++). Pentru fiecare soluţie se vor descrie informal detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: semnificaţia variabilelor, a structurilor de date, a structurilor repetitive, a instrucţiunilor condiţionale.

Timp de lucru - 3 ore.