Concursul *Traian Lalescu*. Anul I

Problema 1.

(1) Fie $\sigma \in S_n$ o permutare ciclică de ordin 5, iar $\beta \in S_n$ o permutare ciclică de ordin 6. Demonstraţi că ecuaţia $x^3 = \sigma$ are soluţie în S_n şi că ecuaţia $y^3 = \beta$ nu are soluţie.

(2) Formulaţi şi demonstraţi un rezultat cât mai general, de acelaşi tip cu primul punct al problemei.

Problema 2.

(1) Fie f un endomorfism al lui $\mathbb{R}^n$ care satisface $(f \circ f)(x) = x$ pentru orice $x \in \mathbb{R}^n$. Arătaţi că există o bază a lui $\mathbb{R}^n$ în care matricea lui f este de forma $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$.

(2) Arătaţi că grupurile $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ şi $\mathrm{GL}(m, \mathbb{R})$ sunt izomorfe dacă şi numai dacă $m = n$.

Problema 3.

(1) Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încât

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Să se arate că $f^{(k)}(0) = 0, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

(2) Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie indefinit derivabilă astfel încât

$$g\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Calculaţi $g^{(k)}(0), \ \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Timp de lucru: 3 ore.

Barem anul I

Problema 1. 1 punct din oficiu

(1) Pentru ecuaţia $x^3 = \sigma$, caută soluţia de forma unui ciclu de lungime 5 .... 2 puncte
Pentru ecuaţia $y^3 = \beta$, descompune y în cicli disjuncţi şi ajunge la contradicţie .... 2 puncte

(2) Formularea rezultatului .... Maxim 3 puncte
Demonstrarea rezultatului enunţat .... 2 puncte

Problema 2. 1p din oficiu

(1) Valorile proprii sunt ± 1 .... 1 punct
Suma subspaţiilor proprii este $\mathbb{R}^n$ .... 2 puncte
Finalizare .... 1 punct

(2) Observaţia că există exact $n-1$ clase de conjugare de elemente de ordin 2 diferite de id în $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ .... 3 puncte
Finalizare .... 2 puncte

Problema 3.

1. 1p din oficiu

(1) 4 puncte

(2) 5 puncte

Concursul *Traian Lalescu*. Anul al II-lea

Problema 1.

Fie p un număr prim şi fie $F(X) = X^{p-1} + X^{p-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1$.

(1) Arătaţi ca F este polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
(2) Arătaţi că $F(X^p)$ rămâne polinom ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.
(3) Formulaţi şi demonstraţi un rezultat general, analog celui de la punctul 2.

Problema 2.

Fie $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu $f(x) = 0$ dacă x este număr raţional, iar pentru x număr iraţional $f(x) = n$, unde n este numărul de zerouri imediat după virgulă în scrierea zecimală a lui x.

(1) Fie $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că funcţiile $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ cu

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & 10^{-n} \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{altfel} \end{cases}$$

sunt etajate (simple). Să se deducă de aici că f este măsurabilă.

(2) Să se calculeze

$$\int_0^1 f(x) d\mu.$$

Problema 3.

Fie E un elipsoid şi $c(s)$ o geodezică pe E, parametrizată canonic. Fie $2R(s)$ lungimea diametrului elipsoidului paralel cu $c'(s)$ şi fie $S(s)$ distanta de la centrul lui E la planul tangent la E in punctul $c(s)$.

Să se arate că produsul $R(s)S(s)$ este constant.

Timp de lucru: 3 ore.

Barem anul al II-lea

Problema 1.

Din oficiu .... 1 punct

(1) Substituţia $X \leftarrow X+1$, apoi criteriul Eisenstein ...... 1 punct

(2) Trecerea în $\mathbf{Z}_p[X]$ .... 1 punct

Descompunerea lui $\hat{G}$ şi $\hat{H}$ .... 1 punct

Contradicţia .... 2 puncte.

(3) Formularea rezultatului general .... 2 puncte

Demonstraţia .... 2 puncte

Problema 2. 1p din oficiu

(1) 4 puncte

(2) 5 puncte

Problema 3. 1p din oficiu

Ecuaţia redusă a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ .... 0,5 puncte

$N=(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2})$ e normal la elipsoid .... 1 punct

$c(s)=(f(s),g(s),h(s))$ e geodezică ddacă $c''=\lambda N$ .... 2 puncte

$R=(\frac{f'^2}{a^2}+\frac{g'^2}{b^2}+\frac{h'^2}{c^2})^{-1/2}$ .... 1 punct

$S=(\frac{f^2}{a^4}+\frac{g^2}{b^4}+\frac{h^2}{c^4})^{-1/2}$ .... 1 punct

Derivând de 2 ori $\frac{f^2}{a^2}+\frac{g^2}{b^2}+\frac{h^2}{c^2}=1$ şi folosind condiţia de geodezică rezultă $\lambda=-\frac{S^2}{R^2}$ .... 1 punct

$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(\frac{1}{R^2S^2})=0$ .... 2,5 puncte