## CLASA A XI-A
## SOLUŢII

1. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, şi $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ cu proprietatea $\operatorname{tr}(AX) \leq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(X)$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Arătaţi că $A = 0$.

*Soluţie:* Fie $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Conform ipotezei, $\operatorname{tr}(A \cdot (-X)) \leq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(-X)$, de unde $\operatorname{tr}(AX) \geq \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(X)$. Am obţinut deci $\operatorname{tr}(AX) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(X)$ pentru orice $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Punând $X = I_n$, obţinem $\operatorname{tr}(A) = n\operatorname{tr}(A)$, de unde $\operatorname{tr}(A) = 0$.
Punând $X = A^t$, obţinem $\operatorname{tr}(AA^t) = \operatorname{tr}(A)\operatorname{tr}(A^t) = 0$, de unde $A = 0$. $\square$

2. Şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ de numere reale se va numi *contractiv* dacă există $r \in (0,1)$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ să aibă loc relaţia $|a_{n+1} - a_n| < r|a_n - a_{n-1}|$.
a) Arătaţi că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ definit prin $a_0 = 1$ şi $a_n = \frac{1}{4+a_{n-1}}$, pentru $n \geq 1$, este contractiv.
b) Arătaţi că orice şir contractiv este şir Cauchy. (Un şir de numere reale $(a_n)_{n\geq 0}$ se numeşte *şir Cauchy* dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ cu proprietatea că $|x_m - x_n| < \epsilon$ oricare ar fi $m, n \geq n_\epsilon$.)
c) Daţi un exemplu de şir care nu este convergent, dar satisface relaţia $|a_{n+1} - a_n| < |a_n - a_{n-1}|$ pentru orice $n \geq 1$.
d) Daţi exemplu de şir convergent care nu este contractiv.

*Soluţie:* a) Se arată mai întâi prin inducţie că $a_n > 0$ şi $a_n \in \mathbb{Q}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Nu există $n \in \mathbb{N}$ astfel ca $a_{n+1} = a_n$, deoarece ar rezulta $a_n^2 + 4a_n - 1 = 0$, de unde $a_n = \sqrt{5} - 2 \notin \mathbb{Q}$, contradicţie.
Fie acum $n \geq 1$.

$$|a_{n+1} - a_n| = \left|\frac{1}{4+a_n} - \frac{1}{4+a_{n-1}}\right| = \frac{|a_n - a_{n-1}|}{(4+a_n)(4+a_{n-1})} < \frac{1}{16}|a_n - a_{n-1}|.$$

b) Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir cu proprietatea $|a_{n+1} - a_n| < r|a_n - a_{n-1}|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$. Cazul $m = n$ este trivial; pentru a fixa ideile, considerăm $m > n$. Avem

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a_{m-1}| + |a_{m-1} - a_{m-2}| + \cdots + |a_{n+1} - a_n| \leq$$

$$\leq (r^{m-n-1} + r^{m-n-2} + \cdots + 1)|a_{n+1} - a_n| \leq \frac{1 - r^{m-n}}{1-r} r^n |a_1 - a_0| < \frac{1}{1-r} r^n |a_1 - a_0|;$$

cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1-r} r^n |a_1 - a_0| = 0$, rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$ este şir Cauchy.

c) Considerăm şirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}$. Se ştie că acest şir este divergent. Dacă $n \geq 1$,

$$|a_{n+1} - a_n| = \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} = |a_n - a_{n-1}|.$$

d) Considerăm şirul cu termenul general $a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}$. Se vede că $(a_n)_{n\geq 0}$ este crescător; în plus,

$$a_n < 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1} < 2,$$

prin urmare, $(a_n)_{n\geq 0}$ este şi mărginit superior. Rezultă că $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent. Să presupunem că $(a_n)_{n\geq 0}$ este contractiv. Există atunci un număr $r \in (0,1)$ astfel încât $|a_{n+1} - a_n| < r|a_n - a_{n-1}|$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că relaţia

$$\frac{(n+1)^2}{(n+2)^2} < r$$

este valabilă pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, de unde $r \geq 1$, contradicţie. $\square$

3. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu proprietatea că există $\alpha > 1$ astfel încât pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $r \in \mathbb{Q}$ să aibă loc relaţia $|f(x) - f(r)| \leq |x - r|^\alpha$.

*Soluţie:* Fie $r, s \in \mathbb{Q}$, $r < s$. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ considerăm punctele echidistante $x_0 = r < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = s$. Folosind proprietatea lui $f$, obţinem:

$$|f(s) - f(r)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}|^\alpha = \frac{|s-r|^\alpha}{n^{\alpha-1}}.$$

Cum $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|s-r|^\alpha}{n^{\alpha-1}} = 0$, deducem că $f(s) = f(r)$. Prin urmare, există $c \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(r) = c$ pentru orice $r \in \mathbb{Q}$.
Luând acum $x \in \mathbb{R}$ şi un şir $(r_n)_n$ de numere raţionale cu $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, avem $|f(x) - c| = |f(x) - f(r_n)| \leq |x - r_n|^\alpha$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} |x - r_n|^\alpha = 0$, rezultă că $f(x) = c$. Prin urmare, $f$ trebuie să fie constantă. Cum, pe de altă parte, orice funcţie constantă verifică condiţia din enunţ, funcţiile căutate sunt cele constante. $\square$

4. Considerăm $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ astfel încât $AB = BA$, iar matricea $I_2 - A$ este nilpotentă. Arătaţi că $\det(A + B^2) \geq 0$. (O matrice $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se numeşte *nilpotentă* dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea că $X^k = 0$.)

*Soluţie:* Cum $I_2 - A$ este nilpotentă, există $n \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $(I_2 - A)^n = 0$.

Cazul $I_2 - A = 0$: Avem $\det(A + B^2) = \det(I_2 + B^2) = \det(I_2 + iB)\det(I_2 - iB) = |\det(I_2 + iB)|^2 \geq 0$.

Cazul $I_2 - A \neq 0$: Se ştie că, pentru matrici de ordin 2, din $(I_2 - A)^n = 0$ rezultă $(I_2 - A)^2 = 0$, de unde obţinem $\mathrm{tr}(A) = 2$ şi $\det(A) = 1$. În aceste condiţii, $A$ nu poate fi de forma $\lambda I_2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, deoarece ar trebui să avem $I_2 - A = 0$, contradicţie cu ipoteza acestui caz. Din $AB = BA$ şi $A \notin \{\lambda I_2 | \lambda \in \mathbb{R}\}$ rezultă (de pildă, prin calcul direct) că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $B = aA + bI_2$. Atunci,

$$B^2 = a^2A^2 + 2abA + b^2I_2 = a^2(2A - I_2) + 2abA + b^2I_2 = (2a^2 + 2ab)A + (b^2 - a^2)I_2.$$

Dacă punem

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix},$$

obţinem

$$\det(A+B^2) = [(2a^2+2ab+1)x+(b^2-a^2)][(2a^2+2ab+1)t+(b^2-a^2)]-(2a^2+2ab+1)^2yz =$$
$$= (2a^2+2ab+1)^2(xt-yz)+(b^2-a^2)(2a^2+2ab+1)(x+t)+(b^2-a^2)^2 = [(a+b)^2+1]^2 \geq 0.$$

$\square$