CLASA A XII-A
SOLUŢII

1. Arătaţi că pentru orice $x > 0$ are loc inegalitatea:

$$\left(\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t\right)^2 + 2\left(\int_0^x \sin t\cos t\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)^2 \leq x^2.$$

Soluţia 1: Considerăm $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \left(\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t\right)^2 + 2\left(\int_0^x \sin t\cos t\mathrm{d}t\right)^2 + \left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)^2 - x^2.$$

Avem

$$f'(x) = 2\cos^2 x\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t + 4\sin x\cos x\int_0^x \sin t\cos t\mathrm{d}t +$$

$$+2\sin^2 x\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t - 2x = 2\int_0^x \cos^2(x-t)\mathrm{d}t - 2x.$$

Cum $\cos^2(x-t) \leq 1$, avem $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[0, +\infty)$. Prin urmare, pentru fiece $x \in [0, +\infty)$ avem $f(x) \leq f(0) = 0$. $\square$

Soluţia 2: Conform inegalităţii Cauchy-Buniakovski-Schwarz în formă integrală,

$$\left(\int_0^x \sin 2t\mathrm{d}t\right)^2 \leq 4\left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)\left(\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t\right) =$$

$$= 2x\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t - 2\left(\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t\right)^2 + 2x\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t - 2\left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)^2.$$

De aici rezultă

$$2\left(\int_0^x \cos^2 t\mathrm{d}t\right)^2 + 4\left(\int_0^x \sin t\cos t\mathrm{d}t\right)^2 + 2\left(\int_0^x \sin^2 t\mathrm{d}t\right)^2 \leq 2x^2.$$

$\square$

2. Arătaţi că grupul $GL_3(\mathbb{R})$ admite un subgrup cu 2010 elemente.

Soluţie: Pentru fiecare $n \in \mathbb{Z}$ considerăm matricea

$$A(k) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2n\pi}{2010} & \sin\frac{2n\pi}{2010} & 0 \\ -\sin\frac{2n\pi}{2010} & \cos\frac{2n\pi}{2010} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarcăm că pentru orice $m, n \in \mathbb{Z}$ are loc relaţia $A(m)\cdot A(n) = A(m+n)$. De aici deducem că $H = \{A(n) | n \in \mathbb{Z}\}$ este închisă la înmulţire. Cum pentru orice $n \in \mathbb{Z}$ avem $A(n) + A(-n) = A(0) = I_3$, rezultă că $A(n) \in GL_3(R)$, iar

inversa sa este $A(-n)$. În consecinţă, $H \subset GL_3(R)$, H e închisă la înmulţire şi conţine inversele (din $GL_3(R)$) ale tuturor elementelor sale, deci H e subgrup al lui $GL_3(R)$.
Întrucât pentru $x, y \in \mathbb{R}$ avem $\cos x = \cos y$ şi $\sin x = \sin y$ dacă şi numai dacă $x - y = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$, deducem că $H = \{A(0), A(1), \ldots, A(2009)\}$, iar elementele $A(0), A(1), \ldots, A(2009)$ sunt distincte două câte două. Prin urmare, H are exact 2010 elemente, deci este un subgrup al lui $GL_3(R)$ de tipul cerut. $\square$

3. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care verifică relaţia următoare pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in \mathbb{R}$:

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)\mathrm{d}t = nf(x) + \frac{1}{2}.$$

Soluţie: Cum membrul stâng al relaţiei date este o funcţie derivabilă în raport cu x, rezultă că f este derivabilă. Derivăm relaţia şi obţinem $f'(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$; de aici se obţine şi continuitatea lui f'. Prin prelucrarea relaţiei anterioare se obţine pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$

$$f'(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f\left(x + \frac{1}{2n}\right) + f\left(x + \frac{1}{2n}\right) - f(x)\right) =$$

$$= n \cdot \frac{1}{2n} f'\left(x + \frac{1}{2n}\right) + n \cdot \frac{1}{2n} f'(x).$$

De aici rezultă că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \in \mathbb{N}^*$ avem $f'\left(x + \frac{1}{2n}\right) = f'(x)$. În continuare, putem scrie $f'(x) = f'\left(x + \frac{1}{2n}\right) = f'\left(x + \frac{2}{2n}\right) = \cdots$; inductiv, se obţine $f'\left(x + \frac{k}{2n}\right) = f'(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $k, n \in \mathbb{N}^*$. Punând $x = 0$, obţinem $f'\left(\frac{k}{2n}\right) = f'(0)$ pentru orice $k, n \in \mathbb{N}^*$. Considerând $k \in \mathbb{Z}_-^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi punând $x = \frac{k}{2n}$, obţinem $f'\left(\frac{k}{2n}\right) = f'(0)$. Prin urmare, am obţinut $f'(r) = f'(0)$ pentru orice $r \in \mathbb{Q}$. Luând acum $x \in \mathbb{R}$ şi un şir $(r_n)_n$ de numere raţionale cu $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$, continuitatea lui f' conduce la $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f'(r_n) = f'(0)$.
În concluzie, f' este constantă, prin urmare există două numere reale a şi b astfel încât $f(x) = ax + b$. În aceste condiţii, relaţia din enunţ se rescrie

$$n^2 \int_x^{x+\frac{1}{n}} (at + b)\mathrm{d}t = n(ax + b) + \frac{1}{2}.$$

Efectuând calculele, constatăm că această relaţie este echivalentă cu $n(ax + b) + a = n(ax + b) + \frac{1}{2}$, de unde rezultă $a = \frac{1}{2}$.
În concluzie, funcţiile căutate sunt cele de forma $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + b$. $\square$

4. Presupunem că R este un inel nenul, finit, în care relaţia $x^2+y^2+2z^2=0$ nu poate fi îndeplinită decât de $x=y=z=0$. Arătaţi că R trebuie să aibă număr par de elemente.

Soluţie: Fie R ca în enunţ. Presupunem că R are un număr impar r de elemente. Notând cu n ordinul lui 1 în grupul aditiv $(R,+)$, n trebuie să dividă r, deci n este şi el impar. Atunci, $2n$ este congruent cu 2 modulo 4, deci, conform teoremei Gauss-Legendre, el se scrie ca sumă de trei pătrate de numere naturale, să zicem $2n=a^2+b^2+c^2$. Din $2n \equiv 2 \pmod 4$, rezultă că unul dintre numerele a,b şi c, să zicem a, este par, iar celelalte două sunt impare. Scriem $a=2\alpha$, $b=2\beta+1$, $c=2\gamma+1$, cu $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}$. Atunci,

$$2n=4\alpha^2+(2\beta+1)^2+(2\gamma+1)^2=4\alpha^2+2\left[(\beta+\gamma+1)^2+(\beta-\gamma)^2\right];$$

punând $x=\beta+\gamma+1, y=|\beta-\gamma|$ şi $z=\alpha$, obţinem relaţia $n=x^2+y^2+2z^2$ în numere naturale. Această relaţie conduce la $x^2+y^2+2z^2=0$ în R. Conform ipotezei, aceasta conduce la $x=y=z=0$ în R, de unde obţinem în numere naturale relaţiile $n|x, n|y$ şi $n|z$, ceea ce implică $n^2|n$, deci $n \in \{0,1\}$, contradicţie. $\square$