Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere iulie 2010,
Domeniul de licenţă - *Matematică*

I. Algebră

1. Fie $x_1, x_2 \in \mathbf{C}$ rădăcinile ecuaţiei $x^2 + 2x + m = 0$, unde $m \in \mathbf{R}$.
a) Să se determine valorile lui m pentru care $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$.
b) Să se calculeze $x_1^2 + x_2^2$ şi $x_1^3 + x_2^3$ în funcţie de m.
c) Dacă $m = -2^{2p}$ cu $p \in \mathbf{N}$, arătaţi că ecuaţia nu are rădăcini întregi.

2. Fie $A = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbf{Z}\}$. Să se arate că:
a) A este inel comutativ fără divizori ai lui zero în raport cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire a numerelor reale;
b) $2 + \sqrt{3}$ este un element inversabil al inelului A. Deduceţi că A are o infinitate de elemente inversabile.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f : (0, \infty) \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = \dfrac{x \ln x - 1}{x}$, $\forall x > 0$.
a) Studiaţi monotonia funcţiei f.
b) Determinaţi asimptotele la graficul funcţiei f.
c) Definim şirul $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $x_0 > e$ şi $x_{n+1} = x_n f(x_n) + 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Calculaţi $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$.

2. Fie $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{x^n + 1}\, dx$, unde $n \in \mathbf{N}^*$.
a) Să se calculeze I_1 şi I_2.
b) Să se arate că $I_n < 1$ şi $I_{n+1} < I_n$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

III. Geometrie

1) Fie paralelogramul $ABCD$. Notăm cu $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. Fie E mijlocul lui AD şi punctele R, S astfel încât $\overrightarrow{CS} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{CB}$ şi $\overrightarrow{DR} = \frac{1}{3}\ \overrightarrow{DC}$. Să se exprime vectorii $\overrightarrow{BE}$ şi $\overrightarrow{RS}$ în funcţie de $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{v}$ şi să se arate că BE || RS.

2) Fie M un punct interior dreptunghiului $ABCD$. Să se arate că

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

3) În sistemul cartezian de coordonate xOy considerăm punctele $A(3, -2)$, $B(2, 0)$ şi $C(4, 1)$. Să se scrie ecuaţia dreptei care trece prin punctul C şi este paralelă cu dreapta AB.

4) Ştiind că $\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\sin 2x$.

IV. Informatică

Fie $S(m)$ un sistem de triaj cu o stivă de dimensiune m şi două operaţii:
1. se introduce în stivă un număr citit de la tastatură
2. se afişează la consolă un număr extras din stiva nevidă,
oricare dintre cele două operaţii putând fi aplicată ori de câte ori este posibil.

Prin citirea de la tastatură a numerelor $1, \ldots, n$, în această ordine, cu $n \leq m$ şi aplicarea operaţiilor descrise mai sus, $S(m)$ poate genera permutări cu n elemente, dar nu toate.

a) Daţi exemplu de permutare cu 3 elemente care nu poate fi generată de $S(m)$, ($n = 3$, $m \geq 3$).

b) Fie p o permutare arbitrară cu $n \leq 100$ elemente, dată. Să se scrie un program într-unul dintre limbajele studiate în liceu (Pascal/C/C++) care să decidă dacă p poate fi generată de $S(m)$.

Notă: Se vor preciza detaliile algoritmului folosit şi ale implementării sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.