

Concursul de admitere septembrie 2009,
Domeniul de licență - Matematică

I. Algebră

1. Să se rezolve în \mathbf{R} ecuațiile:

a) $x^3 - 2x^2 - 2x + 1 = 0$.

b) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^x + 1 = 0$;

c) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 0$.

2. Fie mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbf{Q} \right\}$. Să se arate că:

a) G este parte stabilă în $M_2(\mathbf{Q})$ în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

b) (G, \cdot) este grup abelian.

c) Grupul (G, \cdot) este izomorf cu grupul aditiv $(\mathbf{Q}, +)$.

II. Analiză

1. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ și funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ cu

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - 1} & \text{pentru } x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \\ ax + b & \text{pentru } x \in (-1, 1). \end{cases}$$

a) Determinați a și b astfel încât funcția f să fie continuă.

b) Determinați ecuațiile asimptotelor la graficul funcției f .

2. Fie funcțiile $f, g: (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^2 + x \ln x$ și $g(x) = 2x + 1 + \ln x$.

a) Să se arate că funcția f este o primitivă a funcției g .

b) Să se calculeze $\int_{e^2}^e g(x) dx$.

c) Să se calculeze $\int_1^e f(x)g(x) dx$.

III. Geometrie

1. Să se determine $x > 0$ pentru care $x, x + 7, x + 8$ sunt lungimile laturilor unui triunghi dreptunghic.

2. Se consideră vectorii $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j}$. Să se calculeze modulul vectorului $\vec{u} + \vec{v}$.

3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ și $B(-2, a)$, $a \in \mathbf{R}$. Să se determine $a \in \mathbf{R}$ astfel încât dreapta AB să conțină punctul $O(0, 0)$.

4. Fie $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ pentru care $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Să se calculeze $\cos(\alpha + \frac{\pi}{3})$.

5. Se consideră punctele $A(2, 3)$, $B(4, n)$, $C(2, 2)$ și $D(m, 5)$. Să se determine $m, n \in \mathbf{R}$ astfel încât patrulaterul $ABCD$ să fie paralelogram.

IV. Informatică

Se citesc de la tastatură două numere naturale a și b mai mici ca 30000. Să se determine și să se afișeze numărul de zerouri în care se termină produsul $a \cdot b$, fără a efectua produsul.

Notă: Cerința va fi rezolvată într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++). Se vor explica informal detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucțiuni condiționale.

Timp de lucru 3 ore.