Universitatea din Bucureşti,
Facultatea de Matematică şi Informatică

Concursul de admitere septembrie 2009,
Domeniul de licenţă - *Informatică*

I. Algebră

1. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care ecuaţia $x^3 + x^2 + mx - 3 = 0$ are rădăcina $x_1 = 1$. Să se arate că pentru această valoare a lui m celelalte două rădăcini x_2 şi x_3 ale ecuaţiei nu sunt reale şi că $x_1^n + x_2^n + x_3^n \in \mathbf{R}$ pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$.

2. Fie sistemul

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x - y + (m-2)z = 2 \\ x + 2y + 3z = n, \end{cases}$$

unde m şi n sunt parametri reali.

a) Să se calculeze determinantul matricei sistemului.
b) Să se determine m şi n pentru care sistemul este compatibil determinat.
c) Să se rezolve sistemul dacă $m = 2$ şi $n = -1$.

II. Analiză

1. Fie funcţia $f : (-1, \infty) \to \mathbf{R}$ cu

$$f(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

a) Studiaţi monotonia funcţiei f şi determinaţi punctul de extrem local.
b) Arătaţi că $e^{x^2} \geq x^2 + 1$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.
c) Calculaţi $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) \cdot \ln |x|$.

2. Fie $n \in \mathbf{N}^*$ şi $I_n = \int\limits_0^1 (x^n + 1)e^x dx$.

a) Să se calculeze I_1 şi I_2.
b) Să se arate că $I_{n+1} = (n+3)e - (n+2) - (n+1)I_n$, pentru orice număr natural $n \geq 1$.

III. Geometrie

1. Să se calculeze aria unui paralelogram $ABCD$ cu $AB = 10$, $AD = 6$ şi $m(\widehat{BAD}) = 30^0$.

2. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ astfel încât punctele $A(3, 3)$, $B(2, 4)$ şi $C(2m, 1-m)$ să fie coliniare.

3. Fie vectorii $\vec{u} = (2m-1)\vec{i} + m\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + (m-3)\vec{j}$. Să se calculeze $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Să se determine $m \in \mathbf{R}$ pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt perpendiculari.

4. Fie $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ şi $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a - b)$.

IV. Informatică

Se citesc următoarele date:

- n număr natural $n \geq 1$.
- k număr natural $k \geq 1$.
- un vector de dimensiune n cu elemente numere întregi.

Se elimină elementele vectorului din k în k începând cu poziţia 1 până când vectorul conţine un singur element. Când numărătoarea ajunge la sfârşitul vectorului, se continuă cu primul element al său. Să se afişeze poziţia în vectorul dat a unicului element rămas după eliminare.

Notă: Cerinţa va fi rezolvată într-unul dintre limbajele de programare studiate în liceu (Pascal/C/C++). Se vor preciza informal complexitatea timp a soluţiei date şi detaliile de implementare sub formă de program: variabile, structuri de date, structuri iterative, instrucţiuni condiţionale.

Timp de lucru 3 ore.